6.1 自发性对称破缺

自发性对称破缺是一种在统计力学和粒子物理中普遍发生的现象。这种现象能在有限温度或者序参量与哈密顿量不对易的情况下发生，为了更好地讨论这一现象，我们来设想有如下由算符定义的z方向上的自旋密度波：



i表示了晶格上的格点，q是序波矢。

我们在具有旋转不变性的的哈密顿量上利用有序场h加入一个对称性破缺项：



这样每个格点上的磁化强度就变成：



其中Z为配分函数：



为方便起见，我们将讨论限制在关于原点的反射下具有对称性的晶格上，因此(6.3)中的是厄米的，并且是实数。在有限场下，，因为磁化是由有序场激发而成的。

定义6.1：如果系统在热力学极限下保持有限磁化，即使我们从上面取有序场为零，系统也自发破缺对称:



极限的顺序在上式中是至关重要的。通过对两点关联函数进行考察，可以发现即使在没有有序场的情况下对称性的自发破缺也依然可以存在。



在没有有序场的情况下，自旋空间中的关联是各向同性的，与方向α无关。可以证明，动量q处的自发对称性破缺意味着两点关联函数中真正的长程有序:



或者：



其中 是两点i和j的距离，由于N2取极限后整个式子依然大于零，因此其总自旋关联与N2成正比，这要求每个自旋关联都不为零。真正的长程序区别于准长程序，后者指的是在长程下的关联的幂律衰减。

6.2 Mermin and Wagner’s 定理

我们可以预测：对于具有有序基态的系统，热激发态会降低有限温度下的自旋关联。这在经典系统和量子系统中都会发生。当温度远高于典型的耦合能级 J 时，我们预计自旋在长距离处是不相关的，并且磁化强度 mq 在没有有序场的情况下消失。这需要在某个温度 Tc 下有序相和无序相之间发生相变。

海森堡模型的有序基态打破了自旋空间中连续O(3)对称性。通过选择有序场的方向，可以使自发磁化指向球体上的任何位置。这种连续对称性的结果在低维晶格中尤其明显。事实上，正如我们将看到的，事实证明，对于一维和二维，相变恰好发生在 T=0处，即热激发在无限低的温度下扰乱了自旋。

1966 年，Hohenberg 利用 Bogoliubov 不等式（定义在下面）证明在一维和二维的有限温度下不存在超流性（参见参考书目）。遵循基本相同的方法，Mermin和Wagner表明，对于一维和二维的短程自旋模型，在任何有限温度下都不可能出现自发有序。他们的证明（如下所示）专门针对量子海森堡模型。它可以很容易地推广到更大类别的具有连续对称性的模型。

Mermin and Wagner定理6.2：对于量子海森堡模型：



并且其中的短距离作用项遵循：



那么在一维和二维系统的有限温度下，不会有自发性对称破缺，也就是：



首先定义A、B算符的标量积：



其中 是哈密顿量的本征值和本征态，当m不等于n时，括号内非负，因此上式是希尔伯特空间中的真标量积，对于A=B，上式是A的平方范数，





需要证明：



等价于tanh（x）<x，故得到 

又有柯西—斯瓦茨不等式：

那么有：



令：





将带入（A,B）即可得到

那么我们就得到Bogoliubov不等式：



或者：

. 

令 ，那么有：



利用傅里叶变换：



重写海森堡模型：



利用自旋算符的对易关系可以得到：





同理可以得到：



相加即可得到：





由于泰勒展开以及柯西不等式有：





可以将Dk进行放缩：



（已知J有限）

那么就可以把不等式进行化简：



对两边进行基于k的求和，左边可变为积分：



右边可以转为对X的求和：



最后对m进行计算，可以得到分别在一维和二维条件下的估计：



自然自发磁化强度为0。

由于该定理对于所有自旋S都成立，因此可以推断其对海森堡模型的经典情况也成立仅仅需要进行参数放缩即可，而在三维情况下h趋近于零的时候m小于一个有限值，因此在三维空间下有可能出现自发性对称破缺。

Exercise：1、求证：





由于H0具有旋转不变性，其与hSZq对易，那么可以写成：



同理，配分函数Z可以写成：



而我们有：



为了简单起见，我们建立一个只有3个以原点对称格点的模型，两个格点相距R，以第一个格点为原点，且该态为H0的本征态那么就有：



可以得到：



同理可得：



得证；发散的磁化率并不能得到长程相互作用，在二级相变点磁化率发散，但是拥有长程相互作用与否取决于具体模型